



امتحان المذاسى الثانى فى مقياس الميكانيك التطبيقية

فى 2023/06/01
المدة ساعتان

سنة ثالثة : هندسة ميكانيكية

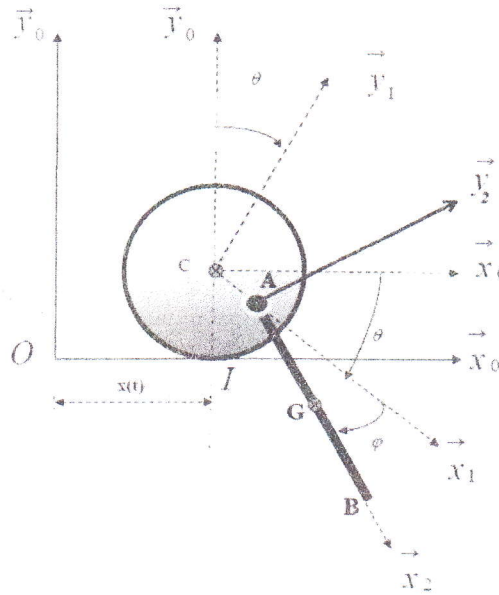
التمرين الأول:

لدينا قرص متجانس مركزه C ونصف قطره R . عند نقطة A من القرص، يتم لحام ساق AB مركز عطالتها هو G وطولها $2L$ ، حيث $AG=GB=L$ ، $AC=a=cte$.

يتدحرج القرص على الأرض المرتبطة بالمعلم الثابت $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ ، نقطة التلامس I بين القرص و الأرض معرفة بـ $\vec{OI} = x(t)\vec{x}_0$ و $\vec{IC} = R\vec{y}_0$.

المعلم $R_1(C, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ مرتبط بالقرص و المستنتج من دوران المعلم R_0 حول المحور $\vec{z}_0 \equiv \vec{z}_1$ بزاوية $\theta(t)$ (الاتجاه الموجب هو عكس عقارب الساعة).

المعلم $R_2(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ المرتبط بالساق و المستنتج من R_1 ، من خلال دورانه حول المحور $\vec{z}_1 \equiv \vec{z}_2$ بزاوية $\varphi(t)$.



R_1 هو مرجع الإسقاط. أوجد:

1. سرعتا الدوران اللحظيتين للجسمين: $\vec{\Omega}_1^0$ و $\vec{\Omega}_2^0$ بالنسبة للمعلم R_0 .
2. سرعة النقطة C بالنسبة للمعلم R_0 $(\vec{V}^0(C))$ ، بالاشتقاق.
3. بالاعتماد على قوانين حركات جسم صلب، تحقق من أن سرعة النقطة A بالنسبة للمعلم R_0 هي $\vec{V}^0(A) = \dot{x} \cos \theta \vec{x}_1 + (\dot{x} \sin \theta - a\dot{\theta}) \vec{y}_1$.
4. أحسب السرعة النسبية للنقطة G $[\vec{V}^1(G)]$ وسرعة الجر $[\vec{V}_1^0(G)]$ ثم استنتج السرعة المطلقة $\vec{V}^0(G)$.
5. أحسب تسارع كوريوليس للنقطة G .

التمرين الثاني:

قضيب متجانس رقيق (S_1) كتلته M و طوله L ، مقيّد بالانزلاق في المستوى (z, y) و هو في تلامس دائم مع نقطة O لإطار

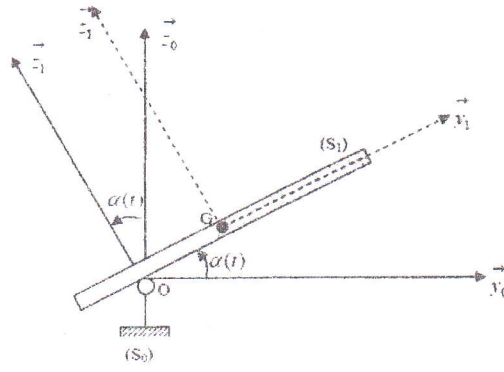
الهيكل الثابت (S_0). مركز العطالة G للقضيب (S_1) هو : $\overline{OG} = y(t)\vec{y}_1$ (انظر الشكل 3)

نضع $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$: معلم ثابت مرتبط بـ (S_0) و $R_1(G, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$: معلم متحرك مرتبط بـ (S_1) حيث:

$$\begin{cases} (\vec{y}_0, \vec{y}_1) = (\vec{z}_0, \vec{z}_1) = \alpha(t) \\ \vec{x}_0 = \vec{x}_1 \end{cases}$$

نأخذ R_1 كمعلم للأسقاط.

● أوجد مركبات المركز اللحظي للدوران I للساق بالطريقة التحليلية.



الحل النموذجي لامتحان الميكانيك الثاني لمقياس الميكانيك التطبيقية

حل التصريف الأول:

1- إيجاد سرعة الدوران اللحظية للقرص والساق:

$$\vec{\Omega}_1^0 = -\dot{\theta} \vec{y}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{\theta} \end{pmatrix}_{R_1} \quad \vec{\Omega}_2^0 = \vec{\Omega}_1^0 + \vec{\Omega}_2^1 = -\dot{\theta} \vec{y}_0 - \dot{\phi} \vec{y}_1$$

$$\vec{\Omega}_2^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -(\dot{\theta} + \dot{\phi}) \end{pmatrix}_{R_1}$$

2- حساب سرعة النقطة C بالإشتقاق:

$$\vec{OC} = \vec{OI} + \vec{IC} = \lambda_C(t) \vec{x}_0 + IC \cdot \vec{y}_0 = \lambda_C(t) \vec{x}_0 + R \vec{y}_0$$

$$\vec{x}_0 = \cos \theta \vec{x}_1 + \sin \theta \vec{y}_1$$

$$\vec{y}_0 = -\sin \theta \vec{x}_1 + \cos \theta \vec{y}_1$$

$$\vec{V}^0(C) = \frac{d\vec{OC}}{dt} = \dot{\lambda}_C \vec{x}_0 = \dot{\lambda}_C (\cos \theta \vec{x}_1 + \sin \theta \vec{y}_1)$$

$$\Leftrightarrow \vec{V}^0(C) = \begin{pmatrix} \dot{\lambda}_C \cos \theta \\ \dot{\lambda}_C \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1}$$

3- التحقق من عبارة سرعة النقطة A بالإعتداد على قانون
الحركات:

$$\vec{V}^0(A) = \vec{V}^0(C) + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{CA}$$

$$\vec{CA} = a \vec{x}_1 \quad (a, r)$$

$$\vec{V}(A) = \begin{pmatrix} \dot{x} \cos \theta \\ \dot{x} \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{\theta} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \cos \theta \\ -a\dot{\theta} + \dot{x} \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1}$$

4- حساب السرعة الزاوية وسرعة الجبر واستنتاج
السرعة المطلقة للنقطة G:

أ- حساب السرعة الزاوية للنقطة G:

$$\vec{V}^1(G) = \frac{d}{dt} \vec{AG} \quad (0, r)$$

$$\vec{AG} = L \vec{x}_2 \quad \text{ou} \quad \vec{x}_2 = \cos \varphi \vec{x}_1 - \sin \varphi \vec{y}_1$$

$$\vec{AG} = L \cos \varphi \vec{x}_1 - L \sin \varphi \vec{y}_1$$

$$\vec{V}^1(G) = -L \dot{\varphi} \sin \varphi \vec{x}_1 - \varphi L \cos \varphi \vec{y}_1 = \begin{pmatrix} -L \dot{\varphi} \sin \varphi \\ -L \dot{\varphi} \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1}$$

ب- حساب سرعة الجبر للنقطة G:

$$\vec{V}_1^0(G) = \vec{V}^0(C) + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{CG} \quad (r)$$

$$\vec{CG} = \vec{CA} + \vec{AG} = a \vec{x}_1 + L \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} a + L \cos \varphi \\ -L \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1}$$

$$\vec{V}_1^0(G) = \begin{pmatrix} \dot{x} \cos \theta \\ \dot{x} \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{\theta} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a + L \cos \varphi \\ -L \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{V}_1^0(G) = \begin{pmatrix} \dot{x} \cos \theta - L \dot{\theta} \sin \varphi \\ -a\dot{\theta} - L \dot{\theta} \cos \varphi + \dot{x} \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1} \quad (0, r)$$

ج- استنتاج السرعة المطلقة للنقطة G:

$$\vec{V}^0(G) = \vec{V}^1(G) + \vec{V}_1^0(G) = \begin{pmatrix} -L\dot{\varphi}\sin\varphi \\ -L\dot{\varphi}\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{x}_C \cos\theta - L\dot{\theta}\sin\theta \\ \dot{x}_C \sin\theta - a\dot{\theta} - L\dot{\theta}\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{V}^0(G) = \begin{pmatrix} \dot{x}_C \cos\theta - L(\dot{\theta} + \dot{\varphi})\sin\varphi \\ \dot{x}_C \sin\theta - a\dot{\theta} - L(\dot{\theta} + \dot{\varphi})\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad R_1$$

5- حساب تسارع كورنوليس للنقطة G:

$$\vec{\gamma}_C(G) = 2\vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{V}^1(G) = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -L\dot{\varphi}\sin\varphi \\ -L\dot{\varphi}\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2L\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\varphi \\ 2L\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad R_1$$

حل التمرين الثاني:

- ايجاد مركبات المركز اللحظي

النقطة I هي نقطة من المستوي (0, y, z). نفرض أن

إحداثياتها هي (y_I, z_I)

$$\vec{V}^0(I) = \vec{V}^0(O) + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{OI} \quad \text{--- 0.1}$$

$$\vec{OI} = (y_I - 0)\vec{y}_1 + (z_I - 0)\vec{z}_1 = y_I \vec{y}_1 + z_I \vec{z}_1 \quad \text{0.2}$$

و نعلم أن النقطة هي المركز اللحظي للدوران فإن سرعتها

$$\text{0.3} \quad \vec{V}^0(I) = \vec{0} \quad \text{0.4}$$

$$\text{0.5} \quad \text{0.6} \quad \text{0.7} \quad \text{0.8} \quad \text{0.9} \quad \text{1.0}$$